

Písemná zkouška z Matematiky 2 pro FSV
LS 2022/23, 16.5.2023, verze A

1. (10 bodů) Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{(x + 3y)(1 - x^2 - y^2)}$$

a spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují.

2. (10 bodů) Ukažte, že rovnice

$$\frac{2}{\pi} \arctg(x + yz) = 2xz^2(1 + y)$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 0, \frac{1}{2}]$ implicitně zadanou funkci $x = x(y, z)$.
Spočtěte $\frac{\partial x}{\partial y}(0, \frac{1}{2})$ a $\frac{\partial x}{\partial z}(0, \frac{1}{2})$.

3. (15 bodů) Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x, y, z) = \frac{1}{1 + (x + y)^2}, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2, x + y - 2z = -3\}$$

4. (15 bodů) Najděte na maximálních intervalech primitivní funkci k funkci f a poté vypočtěte $\int_0^1 f$, kde

$$f(x) = \frac{1 + 2e^x + e^{3x}}{e^{3x} + e^x}.$$

Písemná zkouška z Matematiky 2 pro FSV
LS 2022/23, 22.5.2023, verze B

- 1.** (10 bodů) Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \log(1 - x - y) + \sqrt{x^2 - y}$$

a spočtete její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují. Vypočtete také rovnici tečné roviny v bodě $[-1, -1]$.

- 2.** (10 bodů) Ukažte, že rovnice

$$\begin{aligned}\sin(x + yz) - xe^{y+z} &= 0 \\ \cos(xy + \pi z) + xyz &= -1\end{aligned}$$

určují v jistém okolí bodu $[0, \pi, 1]$ implicitně zadané funkce $x = x(y)$, $z = z(y)$ a spočtete $x'(\pi)$ a $z'(\pi)$.

- 3.** (15 bodů) Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x, y, z) = x^3 + y, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{5}{6}, x + 2y = z\}$$

- 4.** (15 bodů) Najděte na maximálních intervalech primitivní funkci k funkci

$$f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2}.$$

Písemná zkouška z Matematiky 2 pro FSV
LS 2022/23, 7.6.2023, verze C

1. (10 bodů) Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arcsin^2(x^2 + y^2 - 3) + \sqrt{x - 1}$$

a spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují.

2. (10 bodů) Ukažte, že rovnice

$$\frac{xy + 2}{\cos(x + y^2) + 4} + 2y = -2$$

určují v jistém okolí bodu $[-4, -2]$ implicitně zadanou funkci $y = y(x)$ a spočtěte $y'(-4)$. Rozhodněte, zda rovnice také určuje v jistém okolí bodu $[-4, -2]$ implicitně zadanou funkci $x = x(y)$ a pokud ano, spočtěte $x'(-2)$.

3. (15 bodů) Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x, y, z) = x^2 + yz, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 = 6, z \leq x\}$$

4. (15 bodů) Vypočtěte

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin x \cos x + \cos^2 x}{1 + 3 \sin^2 x} dx.$$

Písemná zkouška z Matematiky 2 pro FSV
LS 2022/23, 12.6.2023, verze D

- 1.** (10 bodů) Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+5xy)+x}{x-y} & \text{má-li výraz smysl} \\ 1 & [0, 0] \end{cases}$$

a spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují.

- 2.** (10 bodů) Ukažte, že rovnice

$$2xy + \sin(x + 2y) = -4$$

určuje v jistém okolí bodu $[2, -1]$ implicitně zadanou funkci $x = x(y)$. Spočtěte $x'(-1)$ a $x''(-1)$ a rozhodněte o konvexitě či konkavitě funkce x na okolí bodu -1 .

- 3.** (15 bodů) Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x, y, z) = yz+x, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 5, x^2+z^2 = 5\}$$

- 4.** (15 bodů) Najděte na maximálních intervalech primitivní funkci k funkci f a poté vypočtěte $\int_0^1 f$, kde

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+x}.$$

Písemná zkouška z Matematiky 2 pro FSV
LS 2022/23, 5.9.2023, verze E

1. (10 bodů) Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x) = \sqrt{4 - (x^2 + 2y^2 - 3)^2}$$

a spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují.

2. (10 bodů) Ukažte, že rovnice

$$z^3 - xyz = x^2 - \cos(y - 1)$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 1, -1]$ implicitně zadanou funkci $z = \phi(x, y)$.
Spočtěte $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 1)$.

3. (15 bodů) Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x + y + z}, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 5, x + z = 4\}$$

4. (15 bodů) Najděte na maximálních intervalech primitivní funkci k funkci f , kde

$$f(x) = (x + 2) \ln(x^4 - 1).$$